

Valós szám modulusa, egész része, törtrésze.

Emlékeztető

Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén fennállnak a következő összefüggések!

$ a \geq 0$ $ -a = a $ $ ab = a \cdot b $ $ a^n = a ^n, n \in \mathbb{N}^*$ $\left \frac{a}{b}\right = \frac{ a }{ b }, b \neq 0$ $ha\ b > 0, a \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$ $ a + b \leq a + b $ $ a - b \leq a + b $ $ a - b \leq a - b $	$\{a\}$ - törtrész $[a]$ - egész rész $\in \mathbb{Z}$ $[a] + \{a\} = a$ $a - 1 < [a] \leq a \Leftrightarrow [a] \leq a < [a] + 1$ $0 \leq \{a\} < 1$ $[a] + [b] \leq [a + b] \leq [a] + [b] + 1$ $[a + k] = [a] + k, k \in \mathbb{Z}$ $\{a + k\} = \{a\}, k \in \mathbb{Z}$ $ha\ a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ akkor $[-a] + [a] = -1$ $[a] + \left[a + \frac{1}{2}\right] + \left[a + \frac{1}{3}\right] + \dots + \left[a + \frac{1}{n}\right] = [na], n \in \mathbb{N}^*$
<p>Az $n!$ szám p prímtényezőjének hatványa egyenlő:</p> $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k}\right], \text{ ahol } n \geq p^k$	

Órán megoldott feladatok

1. Számítsd ki:

$$a) a = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \dots + \left[\frac{40}{2}\right] \quad b) b = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \dots + \left[\frac{99}{2}\right]$$

c) $n \geq 1$ esetén igazold, hogy $S = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{2}\right]$, akkor teljes négyzet, ha n páros.

2. Határozd meg az a és b különböző számjegyeket, ha tudod, hogy:

$$\left[\sqrt{abb}\right] + \left[\sqrt{bba}\right] + \left[\sqrt{bab}\right] = a + b\bar{b}$$

3. Adott az x, y, z különböző valós számok, igazold, hogy:

$$(|x - y| + |y - z| + |z - x|) \cdot \left(\frac{1}{|x - y|} + \frac{1}{|y - z|} + \frac{1}{|z - x|}\right) \geq 10$$

4. Adott az a, b, c valós számok úgy, hogy $abc \neq 0$ és $(a + b)(a + c)(b + c) \neq 0$

$$\text{igazold, hogy: } \left|\frac{a}{b+c}\right| + \left|\frac{b}{a+c}\right| + \left|\frac{c}{a+b}\right| > 1$$

5. Határozd meg x pozitív valós számot és n nullától különböző természetes számot melyre fennáll a következő egyenlőség: $[x] + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1,005 \cdot n$.

Javasolt feladatok

6. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$a) ||x + 2| - |x - 1|| = x + 3$$

$$b) \frac{[x] + \{x\}}{2} = [x]$$

$$c) \left[\frac{10x + 2}{6} \right] = \frac{5x + 6}{2}$$

$$d) x + 1 = 4\{x\} + [x]$$

7. A mértani és számtani közepe két különböző a és b természetes számnak \overline{xy} , illetve \overline{yx} . Számítsd ki $|a - b|$.

8. Igazold, hogy bármely a és b valós szám esetén:

$$\sqrt{|a^2 - 1||b^2 - 1|} \leq |1 + ab| + |a + b|$$

9. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$\min\{6x, |x|\} \leq 3x - 1$$

10. Adott az $A = \{n \in \mathbb{N} \mid [\sqrt{n+2}] = [\sqrt{n}], n \leq 2013\}$, határozd meg az A halmaz kardinálisát.

11. Oldd meg a valós számok halmazán:

$$a) \left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x}{3} \right] + \left[\frac{x}{6} \right] = 2013$$

$$b) \left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x}{3} \right] + \left[\frac{x}{6} \right] = 2014$$

$$c) \{x\} - \{2013 \cdot x\} = x$$

12. Adott, a $P(x) = [2x] - [x] - \left[x + \frac{1}{2} \right]$, $x \in \mathbb{R}$, kifejezés

a) Számítsd ki $P(\sqrt{2})$ és $P(\sqrt{3})$ értékeit.

b) Igazold, hogy $P(x)=0$

13. Számítsd ki :

$$a) S = \left[\frac{2010 + 1}{2} \right] + \left[\frac{2010 + 2}{2^2} \right] + \dots + \left[\frac{2010 + 2^{2010}}{2^{2011}} \right]$$

$$b) \left[\sqrt{n^2 + n} \right], n \in \mathbb{N}$$

14. Határozd meg az $[10\sqrt{n^2 + n}]$, $n \in \mathbb{N}^*$ utolsó számjegyét.

15. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a) |x + 1| + (x + 1) + [x + 1] = 10 \quad b) (x - 1)^2 + [x + 1]^2 = 4$$

$$c) \left[\sqrt{\frac{x+2}{3}} \right] = \frac{x-1}{3} \quad d) x = \frac{\{x\}}{[x]}$$

$$e) 2^{[x]+[y]+1} - 2^{[x]} = 1984$$

16. Oldd meg az egész számok halmazán:

$$\left[\frac{\left[\frac{3x+1}{2} \right] + 1}{2} \right] = \left[\frac{6x-1}{2} \right] - \left[\frac{5x-4}{2} \right]$$

Megjegyzés: 5 feladat a házi feladat a javasolt feladatokból